Valéria Saturnino[1]

Odilon Saturnino[2]

Pierre Lucena[3]

MATEMÁTICA FINANCEIRA

APLICAÇÕES PESSOAIS E PROFISSIONAIS

[1] Doutoranda em Administração/Finanças pelo PROPAD/UFPE e Professora da Faculdade dos Guararapes/PE.
[2] Doutor em Administração/Finanças pelo PROPAD/UFPE e Professor do Instituto Federal da Paraíba/IFPB.
[3] Doutor em Administração/Finanças pelo IAG/PUC-Rio e Diretor Acadêmico Regional da Rede Laureate/NE.

SUMÁRIO

1. APRESENTAÇÃO 2
2. CONCEITOS BÁSICOS 3
3. CAPITALIZAÇÃO SIMPLES 5
4. CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA 8
5. EQUIVALÊNCIA DE TAXAS E DE CAPITAIS 12
6. ANUIDADES 15
7. SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE FINANCIAMENTOS 18

1. APRESENTAÇÃO

O curso **Matemática Financeira - Aplicações Pessoais e Profissionais,** oferecido pelo Gestão Financeira Passo a Passo, tem por objetivo capacitar o público a utilizar os principais conceitos de matemática financeira em aplicações cotidianas da vida pessoal e profissional, aperfeiçoando a tomada de decisão e maximizando os resultados.

São diversas as situações cotidianas das pessoas e das empresas em que há a necessidade de se utilizar a matemática financeira, tais como financiamentos de imóveis e veículos, realizações de empréstimos, aplicações financeiras, investimentos em bolsas de valores, dentre muitas outras situações.

Neste curso, os conteúdos serão abordados de uma forma prática, sempre aplicando os conceitos a situações problema das realidades pessoal e empresarial, buscando a melhor decisão a ser tomada.

O conteúdo programático deste curso está dividido nos seguintes grandes temas: (i) Conceitos Básicos, nos quais serão mencionadas as bases para o cálculo da matemática financeira; (ii) Capitalização Simples; (iii) Capitalização Composta; (iv) Equivalência de Taxas e de Capitais; (v) Anuidades; e (vi) Sistemas de Amortização de Empréstimos.

Nesta apostila serão apresentados os conceitos e exercícios utilizados durante o curso, abrangendo os conteúdos supramencionados.

Bons estudos!

Valéria Saturnino
Odilon Saturnino
Pierre Lucena

2. CONCEITOS BÁSICOS

O estudo de finanças consiste em um conjunto de teorias, ferramentas e técnicas essenciais para a tomada de decisão nas empresas e na vida pessoal, com o objetivo de maximização da riqueza pessoal e/ou dos negócios.

Dentro deste contexto, a Matemática Financeira é a base para a compreensão das finanças, a qual se utiliza de conceitos matemáticos para realizar análise de dados financeiros. Sendo assim, os conceitos utilizados em Matemática Financeira estão mais relacionados ao valor do dinheiro no tempo, com cálculos como os de juros e de inflação.

Desta forma, a matemática financeira é muito utilizada para calcular parcelas de empréstimos, projetar o resultado de um investimento, precificar ativos financeiros e avaliar projetos.

Para iniciar os estudos de matemática financeira, é importante saber alguns conceitos básicos referentes às principais nomenclaturas utilizadas para designar os cálculos que serão realizados.

QUADRO 01 – CONCEITOS BÁSICOS	
Principal, Capital ou Valor Presente (PV)	É o valor inicial que será investido, aplicado ou tomado emprestado.
Taxa de juros (em %, chamada de “i”)	É o percentual que representa a compensação de risco de se aplicar naquele investimento ou de se emprestar aquele dinheiro.
Juros (valor monetário R$)	É a compensação real (em dinheiro) calculada através da multiplicação da taxa de juros (i) pelo saldo devedor ou pelo saldo investido.
Período (n)	É o período de aplicação do investimento ou para pagamento do empréstimo. Geralmente é calculado em meses ou em anos.
Saldo, Montante ou Valor Futuro (FV)	È o valor principal (investido ou emprestado) acrescido dos juros em um determinado momento no futuro.
Parcela ou Pagamento (PMT)	Valor pago periodicamente pelo tomador do empréstimo ou recebido periodicamente pelo investidor.

Estes conceitos podem ser aplicados a qualquer situação problema de matemática financeira, de forma a facilitar o entendimento através da compreensão da nomenclatura básica.

2.1 FLUXO DE CAIXA

O Fluxo de Caixa é uma importante ferramenta para a análise das situações problema que envolvem a matemática financeira, e consiste em representar graficamente informações sobre Entradas ou Recebimentos e Saídas ou Pagamentos de dinheiro, durante um determinado período.

No gráfico do Fluxo de Caixa, as setas para cima indicam entradas de recursos monetários, enquanto que as setas para baixo indicam as saídas de recursos monetários. Vejamos o exemplo abaixo:

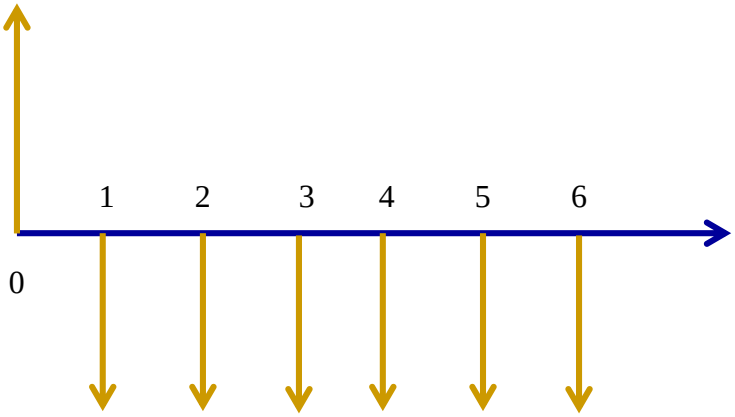

Figura 01 – Exemplo de Gráfico de Fluxo de Caixa

Fonte: Elaboração Própria

O Fluxo de Caixa é bastante utilizado na avaliação financeira de projetos, através do qual são projetadas entradas e saídas de recursos e avaliado o resultado financeiro. O Fluxo de Caixa também é utilizado para prever as entradas e saídas diárias de uma organização, avaliando necessidades de capital de giro e possibilidades de realização de investimentos.

3. CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

Antes de conceituar especificamente a capitalização simples, é importante definir capitalização. O processo de capitalização consiste na incorporação de juros a um Capital (Valor Presente), como consequência de um acordo entre duas partes (superavitárias e deficitárias), implicando na realização de operações tais como investimentos e empréstimos. Os juros que serão incorporados, quando somados ao Capital, formam o Montante (Valor Futuro) que será resgatado ou pago.

A capitalização simples ocorre quando há a incidência de juros apenas sobre o valor do Capital inicial, sendo portanto calculado o percentual de juros sempre com base no valor inicial investido ou emprestado. Desta forma, os juros podem ser calculados pela seguinte fórmula:

$$J = C\ x\ i\ x\ n$$

na qual J representa os Juros, C o Capital inicial (ou Valor Presente), i é a taxa de juros e n é o prazo de aplicação / empréstimo. Já o Montante final (ou Valor Futuro) pode ser calculado da seguinte maneira:

$$M = C\ +\ C\ x\ i\ x\ n$$
$$M = C\ x\ (1 +\ i\ x\ n)$$

Na qual M representa o Montante, C o Capital inicial (ou Valor Presente), i é a taxa de juros e n é o prazo de aplicação / empréstimo.

Antigamente, o regime de capitalização simples era muito utilizado em situações de aplicações e empréstimos de curto prazo. Atualmente, o regime de capitalização simples não é utilizado pelo sistema financeiro, e sim o regime de capitalização composta, por ser mais lucrativo, conforme veremos mais adiante. No capítulo de equivalência de taxas e de capitais também utilizaremos como uma base o regime de juros simples.

3.1 EXERCÍCIOS DE CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

Questão 01) Em quanto tempo um capital de R$ 4.000,00 aplicado a 29,3% ao ano pelo regime linear renderá R$ 1.940,00?

Questão 02) Uma aplicação de R$ 15.000 é efetuada pelo prazo de 3 meses à taxa de juros simples de 26% ao ano. Que outra quantia deve ser aplicada por 2 meses à taxa linear de 18% ao ano para se obter o mesmo rendimento financeiro?

Questão 03) Um eletrodoméstico é vendido por R$ 3.000,00 em três pagamentos mensais e iguais de R$ 1.000,00. O primeiro pagamento é efetuado no ato da compra, e os demais são devidos em 30 e 60 dias. Sendo de 4,4% ao mês a taxa linear de juros, pede-se calcular até que valor interessa adquirir o bem a vista.

Questão 04) Uma pessoa aplicou R$ 500.000,00 em ações da Cia. "X" na bolsa de valores. Sessenta dias depois vendeu-as por R$ 400.000,00. Admitindo-se que ele poderia ter aplicado sua economia no mercado aberto (*open market*), a juros simples comerciais a uma taxa de 96% a.a., quanto foi o seu custo (prejuízo) de oportunidade?

Questão 05) Um móvel custa R$ 250,00 à vista, mas pode ser pago em duas vezes: R$ 150,00 de entrada e R$ 150,00 em 30 dias. Quanto é a taxa de juros simples que a loja está cobrando ao cliente que paga em duas vezes?

3.2 ESTUDO DE CASO – CAPITALIZAÇÃO SIMPLES

Carlos Alberto é um empreendedor que deseja comprar um caminhão para atuar no ramo de transportes de materiais daqui a sete meses. Você foi contratado para realizar algumas análises de mercado e conclui que ele vai precisar, daqui a sete meses, de R$ 50.000,00. Você oferece a ele a opção de fazer aplicações em três tipos investimento para obter esse valor.

No investimento A, se ele investir até R$ 15.000,00 hoje, poderá obter uma taxa de juros simples de 24% ao ano. No investimento B, ele poderá investir no máximo R$ 20.000,00 hoje, podendo obter uma taxa de juros simples de 28% ao ano. No investimento C, ao investir na data atual o restante para completar os R$ 50 mil daqui a sete meses, poderá obter uma taxa de juros simples de 18% ao ano.

Caso ele diversifique os investimentos, o banco oferece a oportunidade de aumentar a linha de crédito dele. Carlos Alberto ficou interessado nessa opção, mas imaginou que um cenário um pouco diferente poderia ocorrer: ele não conseguiria diversificar os investimentos, mas conseguiria aplicar no investimento A. Ele poderia aplicar R$ 15.000,00 hoje, mas

provavelmente não teria os valores a serem aplicados nos investimentos B e C. Ele comenta que poderia dispor de R$ 22 mil daqui a um mês, e o restante daqui a dois meses para completar o montante.

1. Com relação à primeira opção (diversificação de investimentos), que montante Carlos teria ao investir em A e B?
2. Ainda com relação a essa primeira opção, quanto ele teria que investir em C para obter o valor de R$ 50 mil daqui a sete meses?
3. Com relação à segunda opção, quanto Carlos deveria aplicar daqui a dois meses para obter o montante de R$ 50 mil?

4. CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

Diferentemente da capitalização simples, na capitalização composta ocorre um processo de incorporação dos juros ao Principal do empréstimo ou do investimento, sendo a taxa de juros no período seguinte calculada sobre este novo Principal. Desta forma, há uma capitalização exponencial (juros correm sobre juros), e o Montante (Valor Futuro) é maior do que se a capitalização fosse realizada no regime de juros simples.

Utilizamos capitalização composta em todos os aspectos que envolvem a relação entre as pessoas e empresas com o mercado financeiro. Por exemplo, quando você paga apenas o valor mínimo do seu cartão de crédito, o saldo restante se torna uma divida, sobre a qual vai correr juros, e se você continuar sem pagar, no mês seguinte, os juros serão calculados sobre a soma do valor inicial da dívida mais os juros do mês anterior.

Da mesma forma, investimentos em poupança e renda fixa são capitalizados a juros compostos, nos quais os juros são incorporados ao valor investido, e então no mês seguinte os juros são calculados sobre o valor inicial mais os juros do mês anterior.

Assim sendo, apresenta-se a seguir a dedução da fórmula de capitalização composta:

$$M = C + J$$
$$M_1 = C + Ci = C(1 + i)$$
$$M_2 = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$
$$M_3 = C(1 + i)(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^3$$
$$M_n = C \times (1 + i)^n$$

na qual M é o Montante, C é o Capital inicial, i é a taxa de juros, e n é o período. Percebe-se que os juros são calculados sempre em relação ao Montante do período anterior (n), o qual incluí o montante em n – 1 e os juros do período n.

Esta fórmula também pode ser utilizada com outra nomenclatura bastante conhecida, na qual o Montante representa o Valor Futuro (VF) e o Capital inicial representa o Valor Presente (VP). Sendo assim, a fórmula de capitalização composta também pode ser apresentada como:

$$VF = VP\ x\ (1 + i)^n$$

É interessante utilizar mais esta segunda nomenclatura apresentada, tendo em vista que a Calculadora HP 12C tem nomenclatura semelhante a esta (só que em inglês).

3.1 CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA NA HP 12C

A Calculadora Financeira HP 12C foi lançada pela empresa Hewlett-Packard em 1981, sendo uma ferramenta de extrema importância para a realização de cálculos financeiros com precisão e maior facilidade. A HP 12C utiliza a Notação Polonesa Reversa (RPN), método que permite uma linha de raciocínio mais direta e melhor utilização da memória, consistindo em colocar os valores antes do operador, oferecendo com isso a possibilidade de se realizar operações extensas sem a necessidade de apagar a memória da calculadora e anotar valores intermediários para continuar os cálculos.

Na HP 12C, a parte mais importante que iremos utilizar são as teclas referentes à realização de cálculos financeiros, conforme imagem marcada abaixo.

Os conceitos de cada tecla são:

n - indica o prazo que deve ser considerado. Pode ser dado em qualquer periodiciade, desde que de acordo com a taxa de juros.

i - Significa *interest* (juros, em inglês). Indica a taxa de juros usada no trabalho com o capital. Deve estar de acordo com o indicador de tempo e ser incluída na calculadora como uma porcentagem.

PV - Significa *Present Value* (valor presente, em inglês). É o capital inicial sobre o qual os juros, prazos e amortizações serão aplicados.

FV - Significa *Future Value* (valor futuro, em inglês). É o montante final resultante da soma dos juros acumulados com o Capital inicial, descontados os pagamentos, caso existam.

PMT - Significa *Payment* (pagamento periódico, em inglês). É o valor de uma parcela que pode ser adicionada ou subtraída do montante a cada período.

É necessário tomar cuidado, pois as teclas financeiras da HP 12C estão programadas para fazer a capitalização composta e que, portanto, a capitalização simples deverá ser feita utilizando os conceitos algébricos e não financeiros da calculadora.

Vamos ao exemplo de como se utilizar a HP 12C: A importância de $400,00 foi aplicada por 3 meses a taxa de 5% a.m., no regime de juros compostos. Qual o valor de resgate?

Resposta:

R: R$ 463,05

3.2 EXERCÍCIOS DE CAPITALIZAÇÃO COMPOSTA

Questão 01) No regime de juros compostos, um certo tipo de aplicação duplica o valor da aplicação a cada dois meses. Essa aplicação renderá 700 % de juros em quanto tempo?

Questão 02) Uma pessoa recebe uma proposta de investimento para hoje, quando uma quantia de R$ 200,00 fará com que, no final do segundo ano, o valor do montante seja de R$ 242,00. No regime de juros compostos, qual será a taxa de rentabilidade anual desse investimento:

Para resolver as questões a seguir, considere a seguinte tabela dos valores de compra dos títulos públicos.

Título	Vencimento	Taxa(a.a.)		Preço Unitário Di
		Compra	Venda	Compra
Indexados ao IPCA				
NTNB Principal 150519	15/05/2019	5,52%	-	R$ 1.703,06
NTNB 150820	15/08/2020	5,51%	-	R$ 2.381,05
NTNB Principal 150824	15/08/2024	5,70%	-	R$ 1.261,38
NTNB 150535	15/05/2035	5,67%	-	R$ 2.448,53
NTNB Principal 150535	15/05/2035	5,72%	-	R$ 693,78
NTNB 150850	15/08/2050	5,85%	-	R$ 2.373,99
Prefixados				
LTN 010116	01/01/2016	11,32%	-	R$ 780,61
LTN 010117	01/01/2017	11,63%	-	R$ 695,11
NTNF 010123	01/01/2023	11,86%	-	R$ 921,19
Indexados à Taxa Selic				
LFT 070317	07/03/2017	-0,03%	-	R$ 5.739,25

Questão 03) Determine o montante adquirido ao se aplicar R$ 695,12 na LTN 010117, supondo o resgate em 90 dias, sabendo que o valor atual da Selic corresponde a 9% a.a.

Questão 04) Considere a possibilidade de resgatar antecipadamente (em dois meses após a aplicação) a NTNF 010123, negociada ao preço de R$ 921,19 e taxa de 11,86% a.a., com vencimento previsto para 01/01/2023. Considerando o valor atual da Selic, de 9% a.a., verifique: a) se vale a pena proceder a um resgate antecipado; b) O valor resgatado 2 meses após a aplicação.

Questão 05) Suponha que você planeja investir em um CDB prefixado de um banco que promete pagar uma taxa de 0,7% a.m. para uma aplicação no valor de R$ 1.000,00. Quanto seria possível obter após 6 meses?

5. EQUIVALÊNCIA DE TAXAS E DE CAPITAIS

5.1 EQUIVALÊNCIA DE TAXAS

Quando se fala em capitalização simples, já que a taxa de juros é aplicada sempre sobre o Capital inicial, é possível afirmar que a taxa equivalente de uma periodicidade para outra periodicidade é simplesmente a taxa do período menor vezes a quantidade de períodos que cabem dentro da periodicidade maior.

Por exemplo, em capitalização simples, é possível afirmar que uma taxa de 1% ao mê corresponde a 1% x 12 = 12% ao ano, ou então que uma taxa de 5% ao trimestre corresponde à 5% x 2 = 10% ao semestre.

Entretanto, na capitalização composta, a equivalência de taxas é calculada de maneira diferente. Considere que duas taxas de juros equivalentes são aquelas aplicadas ao mesmo capital, durante o mesmo intervalo de tempo, produzem o mesmo montante. Partindo disso, considere a equivalência das capitalizações abaixo, uma anual e a outra mensal.

$$VP\ x\ (1 + i_a)^1 = VP\ x\ (1 + i_m)^{12}$$
$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_m)^{12}$$

Esta fórmula de equivalência de taxas pode ser aplicada a qualquer outra periodicidade. Tomemos como exemplo a periodicidade trimestral em relação à anual.

$$(1 + i_a)^1 = (1 + i_t)^4$$

Desta forma, é possível aplicar a equivalência de taxas a qualquer periodicidade, lembrando que existe uma nomenclatura em vigor no mercado financeiro acerca das taxas: quando se fala em taxa nominal, ela é contabilizada como juros simples. Por exemplo, quando se diz que uma taxa nominal de 12% a.a. é capitalizada mensalmente, significa que a aplicação é rentabilizada em 1% a.m. Para saber o rendimento efetivo, é necessário utilizar a fórmula acima estabelecida.

5.2 – EXERCÍCIOS - EQUIVALÊNCIA DE TAXAS

Questão 01) Qual a taxa anual de juros de um financiamento que cobra juros mensais de 4,5%?

Questão 02) Determine a taxa mensal equivalente a 0,2% ao dia.

Questão 03) Sabendo-se que determinada aplicação rende 36% ao ano, capitalizados mensalmente, qual a taxa efetiva anual da aplicação?

Questão 04) Calcule os juros acumulados durante 3 anos referentes a uma taxa mensal de 0,5%.

Questão 05) Qual a taxa trimestral de juros referentes a uma taxa anual de 145%?

5.3 EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS

A equivalência de capitais acontece quando dois montantes localizados em períodos distintos se equivalem quando descontados a uma taxa i para um período único. Geralmente o procedimento mais utilizado é trazer todos os valores para a data zero (Valor Presente), através da fórmula de capitalização composta, e comparar se os valores são iguais.

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

Saber calcular equivalência de capitais é muito importante para saber se está sendo feito um bom negócio quando da troca de títulos financeiros, negociações que envolvam trocas de bens móveis e imóveis, dentre outros tipos de negociação.

5.3 – EXERCÍCIOS - EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS

Questão 01) Uma pessoa possui uma nota promissória a receber com valor nominal de R$ 15.000,00, que vencerá em dois anos. Além disto, ele possui R$ 20.000,00 hoje, que irá aplicar à taxa de 2% a.m., durante dois anos. Considerando que o custo de oportunidade do capital hoje, ou seja, a taxa de juros vigente no mercado, é de 2% a.m., pergunta-se:

a. Quanto possui hoje?

b. Quanto possuirá daqui a um ano?

c. Quanto possuirá daqui a dois anos?

Questão 02) Consideramos os valores nominais seguintes e admitindo-se uma taxa de juros compostos de 10% a.a., verificar se os capitais são equivalentes na data focal zero.

Capital (R$)	Datas de vencimento (anos)
1.331,00	3
1.464,10	4
1.610,51	5

Questão 03) Uma pessoa possui uma carteira de títulos, os quais no referido vencimento, cada título vale a quantia respectiva, conforme quadro abaixo. Considerando uma taxa de juros de 3% a.m., pergunta-se qual o valor atual deste conjunto na data zero?

Capital (R$)	Datas de vencimento (mês)
1.000,00	6
2.000,00	12
5.000,00	15

Questão 04) Verificar se as carteiras A e B de valores nominais, referidos à data zero, são equivalentes à taxa de juros de 10% a.a.

Carteira A		Carteira B	
Capital (R$)	Data de vencimento	Capital (R$)	Data de vencimento
1.100,00	1º ano	2.200,00	1º ano
2.420,00	2º ano	1.210,00	2º ano
1.996,50	3º ano	665,50	3º ano
732,05	4º ano	2.196,15	4º ano

Questão 05) Um título no valor nominal de R$ 8.500,00, com vencimento para 5 meses, é trocado por outro de R$ 7.934,84, com vencimento para 3 meses. Sabendo-se que a taxa de juros corrente de mercado é de 3,5% a.m., pergunta-se se a substituição foi vantajosa.

6. ANUIDADES

Na dinâmica das operações nos mercados financeiros é comum se deparar com situações nas quais são pagos ou obtidos rendimentos em valores constantes ao longo de determinado período, caracterizando uma série de pagamentos. Essa série, quando os pagamentos ou recebimentos de juros são iguais, são denominadas de anuidades, as quais podem ser finitas ou infinitas.

Quando ocorrem fluxos de caixa periódicos iguais em um prazo determinado, ou seja, com vencimento, o Valor Presente (VP) ou Valor Futuro (VF) é obtido a partir do fator de juros de uma anuidade, conforme modelos a seguir.

$$VP = C\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}\right] + \frac{VF}{(1+i)^n}$$

$$VF = C\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] + VP(1+i)^n$$

Nos modelos acima expressos, o valor de *C* representa o fluxo constante de pagamento, do ponto de vista do devedor ou agente emissor de títulos no mercado de capitais. Para determinar o valor atual de pagamentos futuros iguais, a soma desses valores pode ser efetuada a partir do fator de juros de valor presente. Como os títulos negociados têm o seu principal pago no vencimento, este valor também pode ser atualizado a partir do desconto do valor Futuro (VF) à taxa de juros *i*, o qual neste caso se trata do valor nominal dos títulos.

Exemplo 1: Determine o montante de uma série de 20 pagamentos mensais vencidos no valor de R$ 150,00, sabendo que a taxa de juros mensal é de 2%:

n = 20
PMT = 150,00
i = 2% = 0,02
M = ?

$$M = PMT\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \Rightarrow M = 150\left[\frac{(1+0{,}02)^{20} - 1}{0{,}02}\right] = 150\left[\frac{(1{,}02)^{20} - 1}{0{,}02}\right] = 150 \times 24{,}30 = 3.644{,}61$$

Na HP:

20 n

150 PMT

2 i

FV → 3.644,61

Exemplo 2: Um automóvel foi adquirido em 24 prestações mensais postecipadas. Sabendo que o preço à vista é R$ 25.000 e que a taxa de juros mensal cobrada no financiamento é de 3,0%, calcule o valor da prestação mensal.

n = 24
PV = 25.000
i = 3% = 0,03
PMT = ?

$$PV = PMT\left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}\right] \Rightarrow 25.000 = PMT\left[\frac{(1+0{,}03)^{24} - 1}{(1+0{,}03)^{24} \times 0{,}03}\right] \Rightarrow 25.000 = PMT\left[\frac{(1{,}03)^{24} - 1}{(1{,}03)^{24} \times 0{,}03}\right]$$

$$PMT = \frac{25.000}{\left[\frac{(1{,}03)^{24} - 1}{(1{,}03)^{24} \times 0{,}03}\right]} = \frac{25.000}{16{,}94} = 1.476{,}19$$

Na HP:

24 n

25.000 PV

3 i

PMT → 1.476,19

Quando uma anuidade apresenta fluxos de caixa contínuos ou com duração infinita, a mesma se constitui como perpetuidade. O fato de não haver crescimento dos fluxos de caixa simplifica a obtenção do Valor Presente (VP) da soma dos fluxos futuros para a expressão a seguir.

$$VP = \frac{C}{i}$$

Esse cálculo tem como uma de suas aplicações a renda auferida em fundos de previdência. Por exemplo, quanto deve ser aplicado na data atual em um fundo de previdência com taxa *i* de 2% a.m. para que o beneficiário obtenha renda perpétua mensal *C* de R$ 5.000,00? O cálculo é expresso abaixo. Para que o beneficiário desse fundo de previdência ganhe, infinitamente, R$ 5.000,00 por mês, deve aplicar, hoje, o valor de R$ 250.000,00.

$$VP = \frac{5.000}{0{,}002} = 250.000{,}00$$

Outra renda periódica perpétua passível de obtenção no mercado de capitais é o dividendo de ações preferenciais, o qual é normalmente constante e proporciona fluxos de caixa infinitos. Por exemplo, uma ação preferencial negociada ao preço (Valor Presente) de R$ 40,00 e com retorno exigido de 4,5% ao trimestre (*i*), permite o pagamento de dividendos perpétuos (*C*) no valor de R$ 1,80 a cada trimestre.

$$40 = \frac{C}{0{,}045} \Rightarrow C = 40 \times 0{,}045 = 1{,}80$$

Outro tipo de perpetuidade é a que proporciona fluxos de caixa variáveis, mas que crescem a uma taxa *g* constante, o que é normalmente verificável no caso de dividendos de ações ordinárias. Por exemplo, qual o preço justo de uma ação (Valor Presente) que pagará dividendos de R$ 2,00 no próximo trimestre (D1) e que crescerão continuamente a uma taxa *g* de 1% a cada trimestre? Considere um retorno da ação (Ri) de 5% ao trimestre:

$$P = \frac{D_1}{R_i - g} \Rightarrow P = \frac{2}{0{,}05 - 0{,}01} \Rightarrow P = 50{,}00$$

7. SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE FINANCIAMENTOS

Em financiamentos concedidos nos mercados financeiros, a devolução do principal da dívida é conhecida como amortização. Enquanto o juro é a remuneração pelo uso do capital financeiro, a amortização é a devolução desse capital.

- Principais formas de devolução:
  - Sistema americano;
  - Sistema de amortização constante (SAC);
  - Sistema de pagamentos variáveis;
  - Sistema francês (Price).

No Sistema de Amortização Americano (SAA), o saldo devedor é pago de uma só vez, em determinado período de tempo, considerando que o pagamento dos juros seja feito continuamente. É como um aluguel de imóvel, em que o inquilino paga um aluguel e, no final do período, entrega o imóvel nas mesmas condições que recebeu.

No Sistema de Amortização Constante (SAC), este normalmente adotado em financiamentos imobiliários, o saldo devedor é amortizado ao longo do tempo e em proporções constantes.

- Características do SAC:
  - Quotas constantes
  - Juros decrescentes
  - Prestações decrescentes

Como calcular o SAC:

Quota (Q)	Juros (J)	Prestação (P)	Saldo Devedor (SD)
$Q = \frac{F}{n}$	$J_n = SD_{n-1} \times i$	$P_n = Q_n + J_n$	$SD_n = SD_{n-1} - Q_n$

Exemplo: Considere que um indivíduo tenha que financiar um imóvel no valor de R$ 100.000,00 pelo SAC, cuja taxa de juros corresponde a 10% ao ano e tendo 5 anos para quitação da dívida. Os cálculos podem ser visualizados na tabela a seguir:

Período	VF	Quota	Juros	Prestação
0	R$ 100.000,00	R$ -	-	-
1	R$ 80.000,00	R$ 20.000,00	R$ 10.000,00	R$ 30.000,00
2	R$ 60.000,00	R$ 20.000,00	R$ 8.000,00	R$ 28.000,00
3	R$ 40.000,00	R$ 20.000,00	R$ 6.000,00	R$ 26.000,00
4	R$ 20.000,00	R$ 20.000,00	R$ 4.000,00	R$ 24.000,00
5	R$ -	R$ 20.000,00	R$ 2.000,00	R$ 22.000,00
Total	-	**R$ 100.000,00**	**R$ 30.000,00**	**R$ 130.000,00**

No Sistema de Amortização Francês (SAF) ou Sistema Price, o saldo devedor é amortizado ao longo do tempo, de forma que cada parcela se torne constante.

- Características do Sistema Price:
  - Quotas crescentes
  - Juros decrescentes
  - Prestações constantes

Como calcular o SAF:

Prestação	Juros	Quota (Q)	Saldo Devedor (SD)
$P = \frac{F}{\frac{[(1+i)^n - 1]}{[(1+i)^n \times i]}}$	$J_n = SD_{n-1} \times i$	$Q_n = P_n - J_n$	$SD_n = SD_{n-1} - Q_n$

Exemplo: Considerando as mesmas condições do exemplo anterior, é construído a seguir o quadro da operação conforme Sistema Price:

Período	SD	Quota	Juros	Prestação
0	R$ 100.000,00	R$ -	-	-
1	R$ 83.620,25	R$ 16.379,75	R$ 10.000,00	R$ 26.379,7481
2	R$ 65.602,53	R$ 18.017,72	R$ 8.362,03	R$ 26.379,7481
3	R$ 45.783,03	R$ 19.819,50	R$ 6.560,25	R$ 26.379,7481
4	R$ 23.981,59	R$ 21.801,44	R$ 4.578,30	R$ 26.379,7481
5	R$ 0,00	R$ 23.981,59	R$ 2.398,16	R$ 26.379,7481
Total	-	**R$ 100.000,00**	**R$ 31.898,74**	**R$ 131.898,74**

GESTÃO FINANCEIRA
Passo a Passo

Quadro de Notações das Fórmulas

Notação	Significado
F	Valor Financiado
SD_{n-1} Q_{n-1} P_{n-1} J_{n-1}	Saldo Devedor, Quota, Prestações e Juros no período anterior
SD_n Q_n P_n J_n	Saldo Devedor, Quota, Prestações e Juros no período atual
i	Taxa de juros da operação
$\frac{[(1+i)^n - 1]}{[(1+i)^n \times i]}$	Fator de Juros de Valor Presente de uma anuidade

Referências Bibliográficas

ASSAF NETO, A. *Matemática Financeira e suas aplicações*, 4. ed., São Paulo: Atlas, 1998.

DORNELAS, A. C. B. *Matemática Financeira e Análise de Investimentos para Concursos Públicos*. São Paulo: Atlas, 2013.

FERREIRA**,** R. G. *Matemática Financeira Aplicada*. Recife: Editora Universitária da UFPE, 2000.